RECAPITULATIFS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET DE LEURS SOLUTIONS RENCONTREES DANS LE COURS DE PHYSIQUE-CHIMIE

(Le paramètre qui évolue dans le temps est noté x)

La forme des solutions est à connaître absolument !

Equations différentielles	Exemples (non exhaustifs)	Solutions
Ordre 1 $\boxed{\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=a}$ $\boxed{}$ à déterminer avec les conditions initiales $x(0)=x_0$	• Vitesse d'un projectile soumis à son poids et à des frottements fluides. • Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC soumis à un échelon de tension. • Concentration d'un réactif dans une réaction d'ordre 1.	$x(t)=\underbrace{\boxed{A}\,e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{solution générale sans second membre (équation homogène) =réponse naturelle}}+\underbrace{\tau a}_{\text{solution particulière avec second membre (équation non homogène) = réponse forcée}}$ $x(t\to\infty)\to\tau a$ (régime permanent)
Ordre 2 **(sans terme dissipatif)** $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0}$ $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=v_0$	• Angle d'un pendule simple non amorti pour des petites oscillations. • Intensité dans un circuit LC sans résistance. • Position d'une masse accrochée à un ressort non amorti pour des petites oscillations.	$x(t)=\boxed{A}\cos(\omega_0 t+\boxed{\varphi})$ $\omega_0=$ pulsation propre
Ordre 2 **(avec terme dissipatif)** $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a}$ $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=v_0$	• Angle d'un pendule simple amorti pour des petites oscillations. • Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC soumis à un échelon de tension. • Position d'une masse accrochée à un ressort amorti pour des petites oscillations.	$x(t)=\underbrace{x_g(t)}_{\text{solution générale sans second membre (équation homogène) =réponse naturelle}}+\underbrace{a/\omega_0^2}_{\text{solution particulière avec second membre (équation non homogène) = réponse forcée}}$ $x(t\to\infty)\to a/\omega_0^2$ (régime permanent) • Si $\Delta>0$ soit $0<Q<1/2$: <u>régime apériodique</u> $x_g(t)=e^{-\beta t}\left(\boxed{A}\;e^{-\Omega t}+\boxed{B}e^{\Omega t}\right)$ avec $2\beta=\omega_0/Q$ et $\Omega^2=\beta^2-\omega_0^2$ (pseudo-pulsation) $\Omega>0$ car β grand • Si $\Delta=0$ soit $Q=1/2\Rightarrow\omega_0=\beta$: <u>régime critique</u> $x_g(t)=\left(\boxed{A}+\boxed{B}\,t\right)e^{-\beta t}$ • Si $\Delta<0$ soit $Q>1/2$: <u>régime pseudopériodique</u> $x_g(t)=\boxed{A}\;e^{-\beta t}\cos(\Omega t+\boxed{\varphi})$ avec $2\beta=\omega_0/Q$ et $\Omega^2=\omega_0^2-\beta^2$ (pseudo-pulsation)

La solution est à savoir retrouver en utilisant les amplitudes complexes (passage dans le domaine fréquentiel)

Ordre 2 **(régime sinusoïdal forcé avec terme dissipatif)** $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x = a\cos(\omega t)}$ ω = pulsation de la source d'énergie extérieure (l'excitation) $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=v_0$	• Intensité dans un circuit *RLC* série en régime sinusoïdal forcé. • Position d'une masse accrochée à un ressort amorti en régime sinusoïdal forcé pour des petites oscillations.	$x(t)=\underbrace{x_g(t)}_{\substack{\text{solution générale}\\ \text{sans second membre}\\ \text{(équation homogène)}\\ =\textbf{réponse naturelle}}}+\underbrace{x_p(t)}_{\substack{\text{solution particulière}\\ \text{avec second membre}\\ \text{(équation non homogène)}\\ =\textbf{réponse forcée}}}$ • $x_g(t)$ idem cas précédent suivant les valeurs de Q $x_g(t\to\infty)\to 0$ • $x_p(t)= X_m \cos(\omega t+\varphi)$ $X_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ (fonction de ω) sont à déterminer en utilisant les amplitudes complexes: $x_p = X_m\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow \underline{X}=X_m e^{j\varphi}$ etc... Phénomène de résonance possible suivant les valeurs de ω Contrairement à $x_g(t)$, $x_p(t)$ **ne dépend pas** des conditions initiales.

La solution est à savoir retrouver (méthode de séparation des variables).

Seul le cas n=2 est au programme (cinétique chimique)

Autre équation différentielle $\boxed{\frac{dx}{dt}+k\,x^n=0}$ $x(0)=x_0$	• En chimie, une cinétique d'ordre n.	$\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{x_0^{n-1}}=(n-1)kt$

Exemple que l'on a rencontré en exercice mais pas exigible au programme

Autre équation différentielle $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}-\omega_0^2x=0}$ $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=v_0$	• Mouvement d'un objet qui glisse sans frottement dans un tube en rotation uniforme.	$x(t)=\boxed{A}\cosh(\omega_0 t+\boxed{\varphi})$

RECAPITULATIF DES DIFFERENTES PULSATIONS RENCONTREES
$\omega_0 \Rightarrow$ pulsation propre du système (pulsation naturelle des oscillations sans pertes d'énergie)
$\left.\begin{matrix}\Omega^2=\omega_0^2-\beta^2 \text{ si } Q>1/2\\ \Omega^2=\beta^2-\omega_0^2 \text{ si } Q<1/2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ pseudo-pulsation, apparait quand le système est dissapatif (il y a des pertes d'énergie)
ω = pulsation de la source d'énergie extérieure (l'excitation) ω_r = pulsation de résonance, valeur particulière de ω qui rend la réponse du sytème maximale

NB : Dans le cours de PT, vous allez rencontrer d'autres équations différentielles linéaires importantes dont les solutions analytiques sont connues : équation de diffusion de la chaleur, équation d'onde, les équations de Maxwell etc...Plus tard, vous rencontrerez peut-être l'équation de Schrödinger. Il faut cependant noter que les équations différentielles linéaires et qui admettent des solutions analytiques sont des exceptions (certes importantes). La plupart sont non linéaires et ne peuvent être résolues que de façon numérique ou appréhendées de façon qualitative.